variétés analytiques p-adiques.

$$f : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i x^i}_{\in \mathbb{Q}_p}, \quad |a_i|_p = \underbrace{|a_i| \to 0}_{\text{si } |i| = i_1 + \dots + i_n \Rightarrow \infty}$$

$$f : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p^n$$

$$f : \underbrace{a + p^l \mathbb{Z}_p^n}_{\uparrow\, \mathbb{I}} \to \mathbb{Q}_p$$

$$a + p^l x$$

$$x$$

$$g : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p : x \mapsto f(a + p^l x)$$

$$\sum_{i \geq 0} a_i x^i$$

ouvert

$$f : U \subset \mathbb{Q}_p^n \to \mathbb{Q}_p^k \qquad f = (f_1, \dots, f_k)$$

analytique

p-adiquement

$$x \in U$$

$$f_{|a + p^l \mathbb{Z}_p^n} \subset U$$

$X \subset \mathbb{Q}_p^n$

non-vide — sous-var. analytique de dimension $\leq k < n$

I. chaque $x_0 \in X$ il existe $x_0 \in \underbrace{a + p^l \mathbb{Z}_p^n}_{B} \subset \mathbb{Q}_p^n$

$\underline{g_1, \dots, g_{n-k}} : B \to \mathbb{Q}_p$ analytique.

$\underline{X \cap B} = \{ x \in \mathbb{Q}_p^n \mid g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 = \dots = g_{n-k}(x) \}$

$rk \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} = n-k$

II. X est une variété analytique de dim k

$U_i \subset X$ ouvert, $\phi_i : U_i \xrightarrow{\cong} \left[\mathbb{Z}_p^k \right.$ ouvert de $\mathbb{Q}_p^k$, $a + p^l \mathbb{Z}_p^k$

$\phi_j : U_j \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p^k$

$\underbrace{\phi_i \circ \phi_j^{-1}}$: $\phi_j(U_i \cap U_j) \rightleftarrows \phi_i(U_i \cap U_j)$ est bi-analytique

isom.

Th. fonction implicites p-adic analyt.

$X \subset \mathbb{Q}_p^n$ X sous-var $\dim_K k$

$\cup$ $\cup$

U_i $\psi_i : V_i \longrightarrow \mathbb{Z}_p^n \supset \underbrace{\mathbb{Z}_p^k \times \underbrace{\{0\}}_{n-k}}$

(bi-analyt. / atlas de $\mathbb{Q}_p^n$)

$$X \cap V_i = \psi_i^{-1}\left(\mathbb{Z}_p^k \times \{0\}\right)$$

var. analyt. X avec (forme volume {analytique}, forme différentielle degré k)

dim k

$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ sur $\mathbb{Q}_p^n)$

(X, ω)

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{Z}_p^k$$

$$\omega'_i = f_i(x) \cdot \underbrace{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k}$$

(f_i fonction analytique sur $\mathbb{Z}_p^k$.)

$$\omega'_j = f_j(y)\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$$

$$\underbrace{\left(\phi_j \circ \phi_i^{-1}\right)^{*}\left(\omega'_i\right)\Big|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}}$$

$$= \underline{\mathrm{Jac}\left(\phi_j \circ \phi_i^{-1}\right)}\; f_i \circ \left(\phi_j \circ \phi_i^{-1}\right) \cdot dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k = \omega'_j .$$

$$\mathrm{Jac}\left(\phi_j \circ \phi_i^{-1}\right) = \det\left(\frac{\partial \left(\phi_j \circ \phi_i^{-1}\right)_r}{\partial x_r}\right)$$

même associer à ω sur X.

intégrer

(orientabilité) $\to$ $\mathbb{Q}_p^n$

(positif..)

ω sur X
$\cup$
$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{Z}_p^k$, ω_i

$\mathbb{Z}_p^k \supset A$, $\omega_i = f(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$

$$\mu_{\omega_i}(A) = \int |f(x)| \cdot |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|$$

positivité

$x \in A \subset \mathbb{Z}_p^k$

Thm : $\varphi : U \subset \mathbb{Q}_p^n \longrightarrow V \subset \mathbb{Q}_p^n$

U ouvert, V ouvert, φ bi-analytique

$A \subset U$

$$\int_{A \subset \mathbb{Q}_p^n} \left|\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j}\right| \underbrace{|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|}_{|dx|} = \int_{\varphi(A)} \underbrace{|dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n|}_{= |dy|}$$

Thm. X, ω_X dim k ; Y, ω_Y dim k

$\varphi : X \longrightarrow Y$ analytique.

$X \supset Z$ fermé et de mesure nulle

$\omega_X = \varphi^*(\omega_Y)$ $\varphi(Z)$ fermé et " "

$\varphi|_{X\setminus Z} : X \setminus Z \to Y \setminus \varphi(Z)$

bi-analytique

$\boxed{\int_X |\omega_X|} = \int_Y |\omega_Y|$

atlas $U_i \subset X$

disjoint

$i \in \mathbb{N}$

$= \sum_i \int_{\mathbb{Z}_p^k} |\omega_i| = \sum_i \int_{\mathbb{Z}_p^k} |f|\,|dx|$ ω_i sur $\mathbb{Z}_p^k$

" $f \cdot dx_1 \ldots dx_k$

1965 Serre classifie les variétés analytiques de dimension $k>0$, compacte.

Soit X var. analyt. compacte de dim $k>0$

alors il existe $r \geq 1$ avec $r \leq p-1$

tel que X est bi-analytiquement isomorphe

avec l'union disjointe de $\mathbb{Z}_p^k$, r fois

$$\bigcup_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_p^k \cong X.$$

r est unique, invariant de X.

$i(X) = r$.

$r \bmod p-1 \in \mathbb{Z}/(p-1)$

$$\bigcup_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_p^k \times \{i\} \cong X.$$

$\cap$ $\mathbb{Q}_p^{k+1}$

preuve : X compact donc X est union disjointe finie de boules $\mathbb{Z}_p^k$.

$X = \bigcup_{\substack{i \in I \\ \text{fini}}} \underbrace{U_i}$ cartes, ouvertes disjointes compact.

$V_i \to \mathbb{Z}_p^k$

$V_j \to \mathbb{Z}_p^k$

N boules $\mathbb{Z}_p^k$. $\underbrace{1} \leq r \leq \underbrace{p-1}$.

$\underbrace{\mathbb{Z}_p} = \underbrace{\bigcup_{i=0}^{p-1} i + p\mathbb{Z}_p}_{\cong \mathbb{Z}_p}$ — p boules.

$\mathbb{Z}_p^k = \bigcup_{i=0}^{p-1} \underbrace{(i + p\mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^{k-1}}$ boite (produit de boules)

$\mathbb{Z}_p^k \cong \bigcup_{i=0}^{p-1} \mathbb{Z}_p^k$

$N \geq p \longrightarrow N-(p-1)$ boules $\mathbb{Z}_p^k$

$\downarrow$

union disjointe de r boules $\mathbb{Z}_p^k$

$\underbrace{1 \leq r \leq p-1}_{\text{unicité}}$

$$X = \bigcup_{i=1,\dots,r} \mathbb{Z}_p^k = \bigcup_{i=1,\dots,r'} \mathbb{Z}_p^k$$

ω sur X analyt. ne s'annule pas ; ω_i analyt. ; ω_i'

$$\int_X |\omega| = r \cdot p^{l} \qquad l \in \mathbb{Z},\ 1 \leq r \leq p-1$$

$+\infty$

$$= r' p^{l'} \qquad l' \in \mathbb{Z},\ 1 \leq r' \leq p-1$$

$$\int_X |\omega| \qquad r \equiv r' \bmod p-1$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \int_{\mathbb{Z}_p^k} |\omega_i| \overset{?}{=} r\, p^{l}$$

il suffit $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p^k} |\omega_i| \equiv \cancel{1\ p^{l}} \equiv 1 \bmod p^{l}$

$$\omega_i = f(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

$$\int |f(x)|\,|dx| \cancel{\in p^{\mathbb{Z}}} = p^{l} \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

ne semble pas

$f(x)$ est analytique sur $\mathbb{Z}_p^k \to \mathbb{Q}_p$

$|f(x)| : \mathbb{Z}_p^k \to \mathbb{R}_{p^{\mathbb{Z}}}$ — continue, d'image discrète

$|f(x)| = |x|$ à image finie. (bornée) $p^{\mathbb{Z}}$ 0

$|f(x)|$ localement constant.

$\mathbb{Z}_p^k$ est compacte.

$|f(x)|$ est constante sur $a + p^m\mathbb{Z}_p^k$

$m \geq 1$.

chaque $a \in \mathbb{Z}_p^k$

$a_i = 0, \dots, p^m - 1$

$$\mathbb{Z}_p^k = \bigcup_{\substack{a_i = 0 \\ i = 1, \dots, k}}^{p^m - 1} a + p^m \mathbb{Z}_p^k$$

$$p^{c_a} = |f(x)| \text{ sur } a + p^k \mathbb{Z}_p^k$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{Z}_p^k} |f(x)|\,|dx|} = \sum_{a_i = 0}^{p^m - 1} \int_{a + p^m\mathbb{Z}_p^k} p^{c_a} \cdot |dx|$$

$$= \underbrace{\sum_{a_i = 0}^{p^k - 1} p^{c_a - (mk)}} \equiv \sum_a 1 \mod p-1$$

$$\equiv p^{km} \mod p-1$$

$$\equiv 1 \mod p - 1.$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^k} |\omega_i| \equiv 1 \mod p-1$$