

variétés analytique p -adiques.

$$f: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p$$

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i x^i$$

$$\in \mathbb{Q}_p^h$$

$$|a_i|_p = \frac{1}{p^{v_p(a_i)}}$$

$$= \frac{1}{p^{v_p(a_i)}} \rightarrow 0$$

$$v_p(a_i) = i_1 + \dots + i_n \rightarrow \infty$$

$$f: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p^h$$

$$f: a + p^l \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p$$

$$\uparrow \begin{matrix} a + p^l x \\ \pm \\ x \end{matrix}$$

$$g: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p : x \mapsto f(a + p^l x)$$

$$\sum_{i \geq 0} a_i x^i \text{ ouvert}$$

$$f: U \subset \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p^k$$

$$f = (f_1, \dots, f_k)$$

analytique p -adique

$$f: a + p^l \mathbb{Z}_p^n \subset U$$

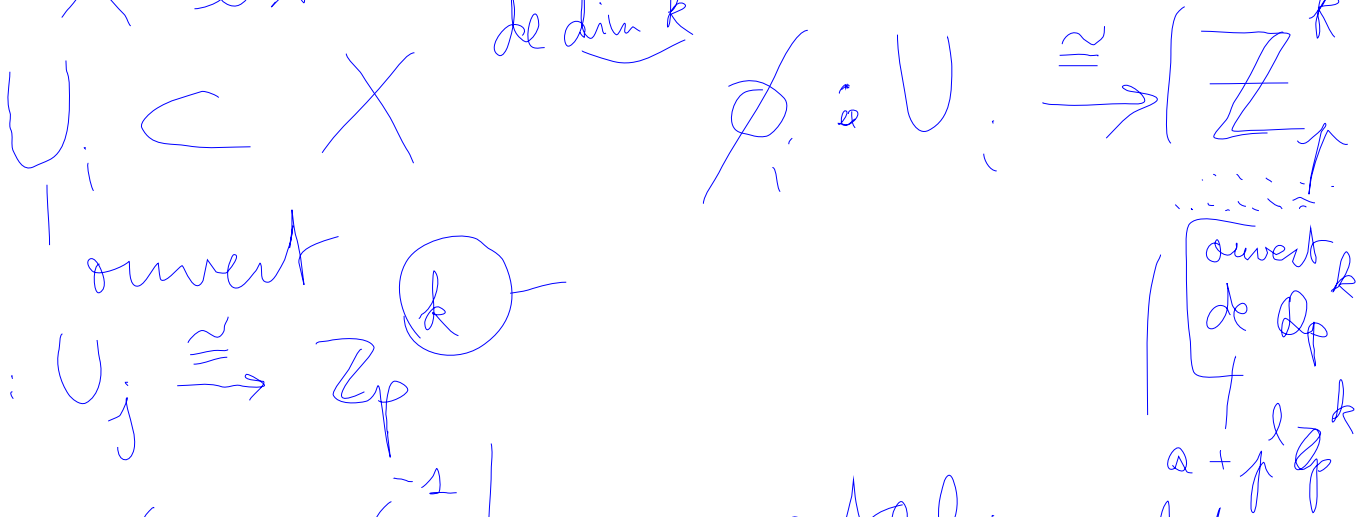
$X \subset \mathbb{D}_p^n$
 non-vide sous-var. analytique
 de dimension $0 \leq k \leq n$

(I) $\forall x_0 \in X \exists$ un $\epsilon > 0$ tel que $x_0 \in a + \overline{r^1} \mathbb{Z}_p^n \subset \mathbb{D}_p^n$

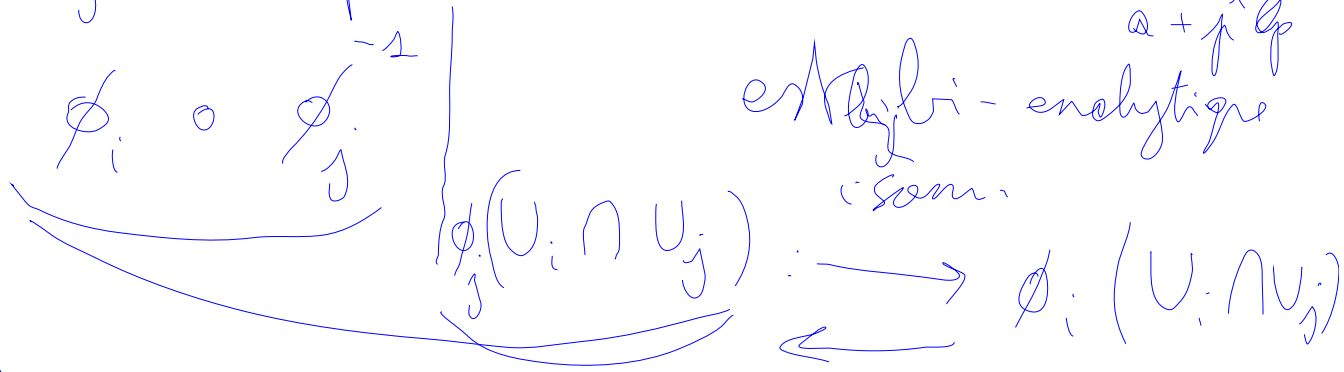
$g_1, \dots, g_{n-k} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{D}_p$ analytique. (B)
 $X \cap \mathbb{B} = \{x \in \mathbb{D}_p^n \mid g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 = \dots = g_{n-k}(x)\}$

$\text{rang} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} = n - k$

II X est une variété analytique
 de dim k



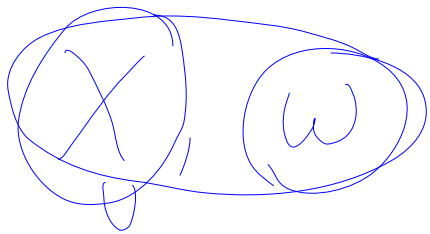
$\phi_j : U_j \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p^k$



Th. fonction implicites p -adique analyt.

$X \subset \mathbb{D}_p^n$ X sous-variété
 \cup dim k
 U_i $\mathbb{D}_p^n \supset \mathbb{D}_p^k \times \mathbb{D}_p^{n-k}$
 $\psi_i: V_i \rightarrow \mathbb{D}_p^n$
 (bi-analyt. atlas de \mathbb{D}_p^n)
 $X \cap V_i = \underline{\underline{\psi_i^{-1}(\mathbb{D}_p^k \times \{0\})}}$

var. analyt. X avec forme volume ω analyt.
 dim k (forme différentielle degré k)



$\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{D}_p^k$ (dx_1, \dots, dx_k) sur \mathbb{D}_p^k
 $\omega_i = f_i(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$
 $\omega_j = f_j(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$
 $(\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(\omega_i) / \phi_i(U_i \cap U_j)$
 (fonction analytique sur \mathbb{D}_p^k)

$= \frac{\text{Jac}(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) \cdot f_i \circ (\phi_j \circ \phi_i^{-1})}{\det\left(\frac{\partial (\phi_j \circ \phi_i^{-1})}{\partial x_r}\right)} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k = \omega_j$

même associé à w sur X .
 • entier
 → (orientabilité)



$$\mu_{w_i}(A) = \int_{x \in A \subset \mathbb{Z}^k} \underbrace{|f(x)|}_{\text{positif}} \cdot \underbrace{|dx_1 \dots dx_n|}_{\text{positif}} = \int f(x) dx_1 \dots dx_n$$

Thm: $\varphi: U \subset \mathbb{Q}^n \rightarrow V \subset \mathbb{Q}^n$
 φ bi-analytique
 x ouvert

$$\int_{A \subset \mathbb{Q}^n} \left| \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) \right| |dx_1 \dots dx_n| = \int_{\varphi(A)} |dy_1 \dots dy_n|$$

$A \subset U$

Thm: X, w_x et Y, w_y
 $\dim k$
 $\varphi: X \rightarrow Y$ analytique.
 Z fermé et de mesure nulle

$$\omega_X = \varphi^*(\omega_Y) \quad \varphi(z) \text{ fermé et " "}$$

$$\varphi : X \setminus Z \rightarrow Y \setminus \varphi(Z)$$

bi-analytique

$$\int_X |\omega_x| = \int_Y |\omega_y|$$

atlas $U_i \subset X$
 \downarrow disjoint
 $i \in \mathbb{N}$
 ω_i sur \mathbb{C}^k
 $" f \cdot dt_1 \dots dt_k$

$$\sum_i \int_{\mathbb{C}^k} |\omega_i| = \int_{\mathbb{C}^k} |f| |dt|$$

1965 Serre classifie les variétés réelles analytiques de dimension $k > 0$, compacte.

Soit X var. analyt. compacte de dim $k > 0$
 alors il existe $r \geq 1$ avec $r \leq p-1$
 tel que X est bi-analytiquement isomorphe
 avec l'union disjointe de \mathbb{C}^k , r fois

$$\bigcup_{i=1}^r \mathbb{C}^k \cong X.$$
 r est unique,
 invariant de X .

$$i(X) = r.$$

$$r \bmod p-1 \in \mathbb{Z}/(p-1)$$

$$\bigcup_{i=1}^r \mathbb{C}^k \times \underbrace{h^i}_{\mathbb{C}P^{k+1}} \cong X.$$

Preuve : X compact donc X est union disjointe ^{finie} de boules \mathbb{Z}_p^k .

$X = \bigcup_{i \in I} U_i$ cartes, ouvertes disjointes, compact.

$\bigcup_{i \in I} U_i \rightarrow \mathbb{Z}_p^k$

$\bigcup_{j \in J} U_j \rightarrow \mathbb{Z}_p^k$

(N) boules \mathbb{Z}_p^k $1 \leq r \leq p-1$.

$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=0}^{p-1} (i + \mathbb{Z}_p)$ p boules.

$\mathbb{Z}_p^k = \bigcup_{i=0}^{p-1} (i + \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^{k-1}$

$\mathbb{Z}_p^k \cong \bigcup_{i=0}^{p-1} \mathbb{Z}_p^k$ p boîtes (produit de boules)

$N \geq p \rightarrow (N - (p-1))$ boules \mathbb{Z}_p^k

union disjointe de r boules \mathbb{Z}_p^k $1 \leq r \leq p-1$ unicité

$$X = \bigcup_{i=1, \dots, n} \mathbb{Z}_p^k = \bigcup_{i=1, \dots, n'} \mathbb{Z}_p^k$$

w (circled)
 analyt.
 → annule par

$$\int_X |w| = r \cdot p^l \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$1 \leq r \leq p-1$$

$$= r' \cdot p^{l'} \quad l' \in \mathbb{Z}$$

$$1 \leq r' \leq p-1$$

$$\int_X |w| \quad r \equiv r' \pmod{p-1}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{Z}_p^k} |w_i| \neq r \cdot p^l$$

il suffit

$$\int_{\mathbb{Z}_p^k} |w_i| \equiv 1 \pmod{p^l}$$

$$w_i = f(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

$$\int |f(x)| |dx| \pmod{p^l} = p^l \quad l \in \mathbb{Z}$$

→ annule par

$f(x)$ est analytique sur $\mathbb{Z}_p^k \rightarrow \mathbb{Q}_p$
 $|f(x)| : \mathbb{Z}_p^k \rightarrow \mathbb{R}_{\neq 0}$ — [continu
 o' image discret

$f(x) = |x|$ à image finie. (borne) \mathbb{Z}

$|f(x)|$ localement constant.

\mathbb{Z}_p^k est compacte.

$|f(x)|$ est constante sur $(a + p^m \mathbb{Z}_p^k)$

$\mathbb{Z}_p^k = \bigcup_{\substack{a_i=0 \\ i=1, \dots, k}}^{p^{k-1}} a + p^m \mathbb{Z}_p^k$

chaque $a \in \mathbb{Z}_p^k$

$a_i = 0, \dots, p^{m-1}$

$m \geq 1$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^k} |f(x)| dx = \sum_{\substack{a_i=0 \\ i=1, \dots, k}}^{p^{k-1}} \int_{a + p^m \mathbb{Z}_p^k} p^{ca} |dx|$$

$$= \sum_{\substack{a_i=0 \\ i=1, \dots, k}}^{p^{k-1}} p^{c(a - (mk))} \equiv \sum_a 1 \pmod{p-1}$$

$$\equiv p^{km} \pmod{p-1}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^k} |w| \equiv 1 \pmod{p-1}$$

